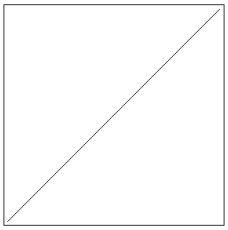
La fonction de Bolzano

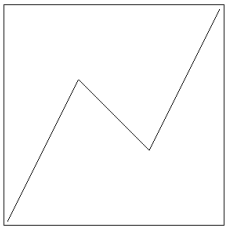
Pour représenter la fonction de Bolzano :

- on part d'un segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$ du plan (étape 0),
- on le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, enfin, on transforme le segment intermédiaire de sorte de maintenir la continuité (étape 1),
- on applique de nouveau le mécanisme précédent à chacun des trois segments de cette ligne brisée (étape 2),
- et on recommence à l'infini...

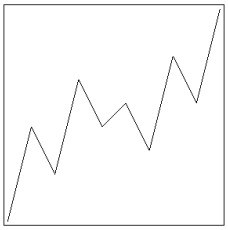
Chaque ligne brisée obtenue est la courbe représentative d'une fonction réelle continue définie sur le segment $[0,1]$. On peut montrer que cette suite de fonctions converge uniformément (vocabulaire de spé), la fonction limite est appelée fonction de Bolzano.
La fonction de Bolzano est continue mais dérivable en aucun point car les pentes des segments des lignes brisées intermédiaires tendent vers l'infini. Le graphe d'une telle fonction fait penser à un mouvement brownien, c'est à dire un mouvement changeant de direction à chaque instant.



étape 0



étape 1



étape 2



Courbe de Bolzano